

多目的最適化解析によるテンション構造の最大剛性形態

MULTICRITERIA OPTIMIZATION FOR MAXIMUM RIGIDITY
AND MINIMUM VOLUME OF TENSION STRUCTURES

陳 沛山*, 川口 衛**

Pei Shan CHEN and Mamoru KAWAGUCHI

Structural shape optimization always adopts structural analysis. For such a reason, the solution of a shape optimization always depends on the loading pattern (loading cases), and it is not so easy to obtain a unique optimum solution for a structure subjected to different loading cases. By weighting function method, the present paper promotes a multicriteria optimization method to maximize the rigidity and minimize the volume (the total volume of all members) of a tension structure subjected to different loading cases. With a purpose of minimizing the nodal displacement vector and the volume, a nonlinear programming method is adopted in the analysis to find the optimum nodal coordinates, member section areas and the distribution of prestresses.

A tensegrity frame is taken as a numerical example, and the results show 24.5% reduction in the volume and that some of the nodal displacements can be reduced 10%, or 30% of their initial values.

1. はじめに

多目的最適化解析(multiobjective / multicriteria optimization)は、本世紀初期ごろに、フランスの経済学者 V. Pareto により発案された¹⁾。長い年月を経て、1970年代に、W. Stadlerらは初めて技術領域におけるベクトル最適化(vector optimization)の応用を研究した²⁾。以来、構造分野においては最小コスト形態に関する研究が主流になっている。近年、コンピュータの大容量化と高速化に伴い、形態最適化(shape optimization)についての研究も多様化になって、数多くの文献が発表されている。筆者はテンション構造の剛性問題に着目し、ベクトル最適化手法を採り入れ、最大剛性形態(最小変位形態)理論を提案した³⁻⁶⁾。

テンション構造は幾何学的不安定構造が多く、全体剛性が低いことが消極的特徴の一つになっている。通常、剛性を高めるためには高いプレストレスの導入が試みられるが、これは一般的に不経済であり、また工

事上の困難を伴う場合もある。従って、テンション構造の最大剛性形態を求める研究が重要な意味を持つようになる。また、このような研究を通じてテンション構造の形態設計に理論的な根拠を与える可能性も期待できる。

構造の形態最適化解析には、構造解析を含む場合が多いため、その最適解(最適形態)が荷重パターンに依存することが明らかである。そして、多種類荷重パターンに対する統一的な最適解を求める研究が必要である。

前段階の研究において、筆者は2種類の最大剛性形態理論を提案した。これは、幾何学的非線形構造解析と非線形計画法を組み合わせる方法^{3, 5)}と線形構造解析を用いる非線形計画法^{4, 6)}のことである。後者は理論解析も簡明で、コンピュータ・プログラムの編成も容易であり、計算速度をアップさせることができ、多目的最適化解析に適用する方法である。しかし、これらの

* 法政大学大学院工学研究科 大学院生・工修
** 法政大学工学部建築学科 教授・工博

Doctoral Student, Graduate School Hosei University, M. Eng.
Prof., Dept. of Architecture, Hosei University, Dr. Eng.

最適化手法は一種類の荷重パターンに対する理論である。本論文は、前述の後者の解析手法より延長し、重み関数法（線形加重法、weighting function）を用いて、多種の荷重パターンに対してテンション構造の剛性を高めると共に部材の占める体積（以下ボリュームと呼ぶ）を最小化することを試みる。

但し、線形構造解析によるテンション構造の解析は近似的であるため、線形構造解析を用いる最適化解析により得られる最適形態も近似的な結果であると考えられる。ゆえに、本解析により得られる最適形態に対して、幾何学的非線形構造解析を行って、構造の剛性変化の有無を検証することが必要である。

本論文には、tensegrity 構造を例題として数値解析を行い、数値的な例示を行った。その結果、ボリュームは24.6%減り、節点変位は10%~30% 減少し、特に非対称荷重に対する全体剛性が高くなることが確認された。

2. 問題及び基本概念

2.1 問題とその数学モデル

本研究では、ある一定な荷重レベルにおいて節点変位（変位ベクトルの大きさ）を最小化することにより、荷重変位曲線の勾配を大きくさせ、構造の全体剛性を高める最適化解析を展開する³⁻⁶⁾。最適化解析の目的関数は式(1)~(4)で表される。

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \sum_{i=1}^n D_i^2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{for loading case 1} \\ \text{for loading case 2} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right. \\ f_2 &= \sum_{i=1}^n D_i^2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{for loading case 2} \\ \text{for loading case 3} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \end{array} \right. \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_i &= \sum_{i=1}^n D_i^2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{for loading case } i \end{array} \right. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$F_1 = w_1 f_1 + w_2 f_2 + \dots + w_i f_i \quad (2)$$

$$F_2 = \sum_{k=1}^m L_k A_k = \mathbb{L}^T \mathbf{A} \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{D} = \{D_i\}$ は節点変位ベクトル、 $\mathbf{A} = \{A_k\}$ は部材の断面積ベクトル、 $\mathbb{L} = \{L_k\}$ は部材の長さであり、 m は部材の数、 n は構造の自由度数である。 F_1 を剛性目的関数、 F_2 をボリューム目的関数と呼ぶ。 $w_1 \sim w_i$ は重み係数 (weighting factor)^{7,8)} である。但し、 $\sum_j w_j = 1$ 。

本解析の最適化問題は次のように表される。

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{minimize} & F = w_1 F_1 + w_2 F_2 \\ \text{subject to :} & \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\phi_j(\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P}) = 0; \quad (j = 1, \dots, s) \quad (5)$$

$$\varphi_k(\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P}) \leq 0, \quad (k = 1, \dots, t) \quad (6)$$

ここに、 $\mathbf{X} = \{x_i\}$ は節点座標ベクトル、 $\mathbf{P} = \{P_k\}$ は部材のプレストレス軸力ベクトルである。式(5)は等式拘束条件 (equality constraints)、式(6)は不等式拘束条件 (inequality constraints) を示している。本解析では、剛性目的関数 F_1 には距離関数法 (distance function)^{7,8)} と重み関数法を、目的関数 F には重み関数法を採用している。 w_1, w_2 はその重み係数である。但し、 $w_1 + w_2 = 1$ 。

この最適化問題は、拘束条件(5)と(6)を満足しながら未定変数 ($\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P}$) (以下設計変数と呼ぶ) を探索することにより目的関数 F を最小にすることである。

但し、テンション構造の解析は一般に三段階に分けて行う。これは、プレストレス導入前の形態解析、プレストレス導入にともなう変形解析、そしてプレストレスを導入した後の付加荷重に対する変形解析である。ここに、 $\mathbf{X}$ はプレストレス $\mathbf{P}$ を導入した後の構造形態の節点座標であり、変位 $\mathbf{D}$ はプレストレス $\mathbf{P}$ を導入した後の荷重により生じるものである。そして、プレストレス導入前の形態（節点座標）は本解析の最終結果 $\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P}$ により得られる。

2.2 支配方程式

剛性目的関数 F_1 と $\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P}$ との間の関数関係式を支配方程式と呼ぶ。この支配方程式はテンション構造の線形解析の基本式の何れか、あるいは何らかの手法で構造を近似的に線形解析できるような解析式である。荷重が十分小さい場合、支配方程式は次式のように表される。

$$\mathbf{K}\mathbf{D} = \mathbf{Q} \quad (7)$$

ここに、 $\mathbf{K}$ は構造の剛性マトリックスであり、 $\mathbf{Q}$ は荷重ベクトルである。 $\mathbf{K}$ にはプレストレス $\mathbf{P}$ により与えられた幾何剛性マトリックスが含まれている⁹⁾。

2.3 拘束条件について³⁻⁶⁾

拘束条件には、常に等式条件と不等式条件、さらに幾何学的拘束条件と力学的拘束条件が含まれている。

幾何学的拘束条件は建築計画あるいは構造計画の要求や建物の目的などにより与えられる。力学的拘束条件は構造の特徴に合わせて力学原理により与えられる。

建築計画の要求や構造的な条件などの存在は当然のことであり、設計変数に拘束条件が付くことも必要である。これらの拘束条件が設計変数の拘束空間（許容空間、設計空間）を与える。

3. 最適化解析

3.1 目的関数の降下方向

本解析は、非線形計画法を用いて、拘束空間において目的関数の減少方向（降下方向）に沿って設計変数を修正することにより最適解を得る。

剛性目的関数の降下方向は目的関数の設計変数による微分のベクトルである。式(7)を微分すると

$$\dot{\mathbf{K}}\mathbf{D} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{D}} = \dot{\mathbf{Q}} \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{K}^{-1}(\dot{\mathbf{Q}} - \dot{\mathbf{K}}\mathbf{D}) \quad (9)$$

を得る。ここに、 $\square$ は設計変数 $\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P}$ による微分を示す。従って、剛性目的関数の降下方向は次式のようにになる。

$$\tilde{\mathbf{d}}^T = -2\mathbf{D}^T(\mathbf{D}\nabla) \quad (10)$$

但し、 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial a_m}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial p_m} \right)$ 。式(8)~(10) は一つの荷重パターンに対する解析である。多様な荷重パターンの場合、 F_1 の降下方向は次のようになる。

$$\nabla^T F_1 = \sum_{i=1}^l w_i \tilde{\mathbf{d}}_i \quad (11)$$

ここに、 $i=1, 2, \dots, l$ は荷重パターンを表している（式(1)と式(2)を参照）。

ボリューム目的関数(3)の降下方向は次式のように表される。

$$\nabla^T F_2 = (\mathbf{L}\nabla)^T \mathbf{A} + \mathbf{L}^T(\mathbf{A}\nabla) \quad (12)$$

従って、目的関数 F の降下方向は次式のようにになる。

$$\hat{\mathbf{d}} = w_1 \nabla^T F_1 + w_2 \nabla^T F_2 \quad (13)$$

3.2 座標変換

構造形態は半径やライズ等の基本寸法だけで定められる場合が多い。また、一部分の部材のプレストレスを先に与えれば、釣り合い条件により構造全体のプレストレスを定めることができる。ここで、これらの基本寸法や先に与える一部分のプレストレスを設計パラメータと呼ぶ。従って、設計変数 $\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P}$ はそれぞれの設計パラメータの関数として表される。

$$\mathbf{X} = \mathbf{g}(q_1, q_2, \dots, q_r) \quad (14)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{h}(a_1, a_2, \dots, a_\beta) \quad (15)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{u}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\gamma) \quad (16)$$

ここに、 $\mathbf{q} = \{q_i\}$; $\mathbf{a} = \{a_j\}$; $\mathbf{p} = \{p_k\}$ はそれぞれ節点座標、部材断面積とプレストレスの設計パラメータを示している。

もし、 $\{q_i\}$, $\{a_j\}$, $\{p_k\}$ は独立変数であり、有効拘束条件が付いていなければ、式(14)~(16)の変換の Jacobi マトリックスは

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial q_j} \end{bmatrix}; \quad (17a)$$

$$(i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, r)$$

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial a_j} \end{bmatrix}; \quad (17b)$$

$$(i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, \beta)$$

$$\mathbf{J}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial \rho_j} \end{bmatrix}; \quad (17c)$$

$$(i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, \gamma)$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_x & & \\ & \mathbf{J}_A & \\ & & \mathbf{J}_p \end{bmatrix} \quad (17d)$$

となる。そして、設計パラメータにおける目的関数 F の降下方向

$$\mathbf{d} = \mathbf{J}\hat{\mathbf{d}} \quad (18)$$

が得られる。但し、

$$\hat{\mathbf{d}} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_r}, \frac{\partial F}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial a_\beta}, \frac{\partial F}{\partial \rho_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \rho_\gamma} \right)^T \quad (19)$$

また、設計変数 $\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P}$ を他の一般座標系へ変換せずに解析を行うこともできる(文献4, 6)を参照)。設計変数 $\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P}$ は $n = n + 2m$ 個の成分があり、与えられた等式拘束条件(5)は s 個ある。従って、設計変数のうちに、 $\mathbf{r} = n - s$ 個の独立成分で s 個の等式拘束条件により他の s 個の成分を定めることができる。ゆえに、 $\mathbf{r}$ 個の独立成分を設計変数の一般変数（設計パラメータ）とすれば、式(17)~(19)を適用できる。もちろん、 $\mathbf{P}$ は荷重のない状態でプレストレスの釣り合い条件を満足す

ることが必要である⁶⁾。

拘束条件は設計変数 $\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P}$ の許容領域を作り出している。最適化解析の計算中には、ある局所あるいは許容点において、独立の拘束条件の数が減ることが可能である。ここで、最適化計算中にランクが一定となる拘束条件（空間）を非退化的拘束条件（空間）(nondegeneracy)¹⁰⁾と呼び、逆にランクが減る拘束条件を退化的拘束条件（空間）(degeneracy)と呼ぶ。ここまでの解析では拘束空間が非退格的であると仮定している。退格的 拘束空間の場合、最適化計算（反復計算）のステップごとに J のランクをチェックし、非独立行と列を取り出し、独立行と列のみを扱い、独立行に対応している変数を一般変数として扱う。

3.3 設計パラメータの修正

最適化計算の第 k ステップで、目的関数の降下方向 $\mathbf{d}$ に沿って設計パラメータを修正する。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}^k + \alpha \mathbf{d}^k \quad (20)$$

ここに α はステップ長さである（文献5,6)に参照）。最適条件を満足するまで繰り返し計算すると最適解を得ることができる。本論文で用いられる最適条件は原則的に Kuhn and Tucker^{10,11)}の条件である。

3.4 不等式拘束条件について

最適化計算の第 k ステップで得られる点 $\begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{a} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}^k$ が拘束空間の境界に近付くと、

$$\varphi_i(\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P})^k < 0; \quad \varphi_i^k \approx 0, \quad (i=1, \dots, t) \quad (21)$$

が成り立つ。テイラー展開により、式(6)は上式の前提で近似的に次式のように表される。

$$\{\varphi_i\}^k + \alpha \mathbf{G} \mathbf{d} \leq 0 \Rightarrow \mathbf{G} \mathbf{d} \leq 0, \quad (22)$$

但し、

$$\mathbf{G} = \left(\{\varphi_i\}^k \nabla \right) \mathbf{J}^T \quad (23)$$

最適計算の第 $k+1$ ステップの点が拘束空間の外へ出ないように、この境界の近傍で降下方向 $\mathbf{d}$ を修正することが必要である。つまり、式(22)を満足するように $\mathbf{d}$ を

次のように修正する。

$$d_k = \begin{cases} 0 & \forall i, k: G_{ik} d_k \geq 0 \quad \vee \quad \sum_{j=1}^l G_{ij} d_j \geq 0; \\ d_k & \text{otherwise}; \end{cases} \quad (24)$$

式(20)の降下方向 $\mathbf{d}$ は上式により修正したものである。よって、式(20)により得られる点が不等式条件を満足するようになる。

3.5 解析のアルゴリズム

step 0: 制約条件を満足している初期値 $(\mathbf{X}, \mathbf{A}, \mathbf{P})^0$ を決める。

step 1: 式(7)により変位ベクトル $\mathbf{D}$ を求め、式(17)でJacobi マトリックス $\mathbf{J}$ を計算する。

step 2: 式(9)～(13)により目的関数の降下方向を求める。

step 3: 式(18)と式(24)により $\mathbf{d}$ を得る。
もし、 $\mathbf{d} \approx 0$ ならば、計算をストップ。

step 4: 式(20)により設計変数を修正する。
もし $\alpha = 0$ なら、計算をストップする。

step 5: $F^{k+1} < F^k$ を確認した上で、 $k = k+1$ 、step 1 に行く。

4. 数値解析例題

4.1 例題の説明

図1に示す tensegrity frame を例題として数値解析を行った。最適化により求める未定設計変数は節点座標、部材の断面積、そしてプレストレス軸力である。

荷重は鉛直等分布荷重であるが、各節点に作用している荷重は節点座標の関数となっている。また、剛性目的関数には全域載荷(Full-loading case); 半域載荷(Half-loading case)そして1/4域載荷(Quarter-loading case)の三種類の荷重ケースを採り入れ最適解析を行った。ケーブルとポストのヤング係数はそれぞれ $1.90 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ と $2.10 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ である。

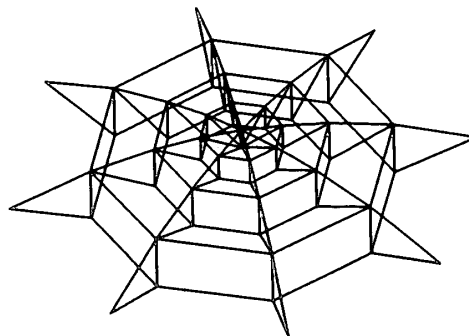


図1 (a)

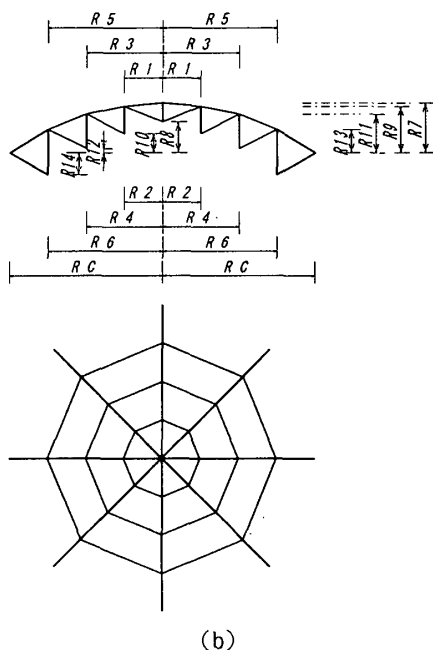


図1 Tensegrity 構造の例題

一般には、設計者は設計目的と各設計要件を分析した上に重み係数を設定する。本例題のtensegrityに対しては、全域荷重による変位が非常に小さく、非対称荷重による変位が非常に大きいことが明らかである。大きな変位を与える荷重ケースに対して構造を補強するために、重み係数は $w_1 = 0.1$; $w_2 = 0.5$; $w_3 = 0.4$; $w_4 = 0.9$; $w_5 = 0.1$ と設定されている。

4.2 拘束条件と設計パラメータ

対称的な構造を得るために、図(1, b)に示すように $R1 \sim R14$ を節点座標の設計パラメータとし、各節点の座標はこれらの設計パラメータにより得られる。従って、幾何学的等式拘束条件が存在していない。

表2.1で示されるように $a_1 \sim a_{18}$ は部材断面面積の設計パラメータである。四つの層のポストのプレストレスはそれぞれ均一であり、この四つのプレストレス値 $P1 \sim P4$ (表2、2.2に参照) はプレストレスの設計パラメータとされている。

力学的等式拘束は、荷重のない状態でのプレストレス軸力の釣り合い式である。力学的不等式拘束条件は、荷重あるいはプレストレスによるケーブルの軸力が正(テンション)であることである。ケーブルとポストの軸力がその終局耐力より小さいことも不等式拘束条件とされている。

4.3 解析結果のまとめ

初期形態と最適形態の各寸法を表1、部材断面面積とプレストレスの変化を表2で表している。

また、最適解(最適形態)に対して幾何学的非線形

構造解析を行った。図3～5は荷重パラメータが5.5における、全域、半域と1/4域載荷による上部節点の鉛直変位を表し、半域と1/4域荷重による上部節点の鉛直変位が10～30%減ることを示している。図7は幾何学的非線形解析による荷重変位曲線を表している。最適化解析の結果、構造のボリュームが24.6%減少することが見られる(図6)。図8は繰り返し計算の収斂様子を表している。

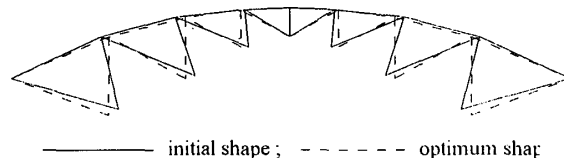
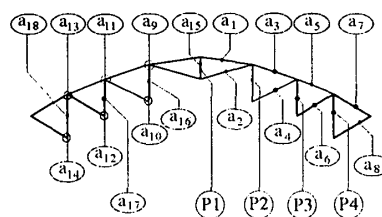


図2 構造断面の変化

表1 各寸法:(cm)

	initial	optimum shape
RC	4000.00	4000.00
R1	700.00	643.84
R2	700.00	593.27
R3	1500.00	1639.46
R4	1500.00	1364.80
R5	2600.00	2708.33
R6	2600.00	2454.04
R7	100.00	1000.25
R8	592.00	592.06
R9	971.00	971.66
R10	448.00	449.63
R11	867.00	868.93
R12	0.00	37.46
R13	593.00	594.79
R14	-520.00	-442.83

表2 部材断面面積とプレストレス軸力

表 2.1 部材の断面面積 (cm²):

	initial	optimum		initial	optimum
a1	20.00	15.61	a10	20.00	16.75
a2	20.00	14.96	a11	20.00	12.19
a3	20.00	14.14	a12	20.00	12.72
a4	20.00	13.43	a13	20.00	6.75
a5	20.00	12.67	a14	20.00	7.36
a6	20.00	11.20	a15	85.00	84.67
a7	20.00	10.39	a16	85.00	81.53
a8	20.00	9.73	a17	130.00	124.36
a9	20.00	16.64	a18	130.00	122.79

表 2.2 プレストレス軸力 (kg) :

	P1	P2	P3	P4
initial	-2500.000	-3000.000	-10000.000	-50000.000
optimum	-2500.000	-3000.021	-10000.204	-50000.044

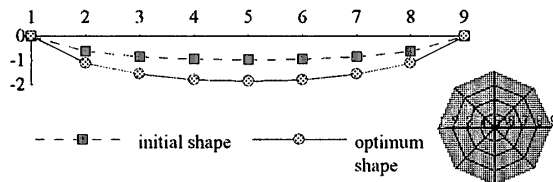


図 3 Full-loading case による上部節点の変位

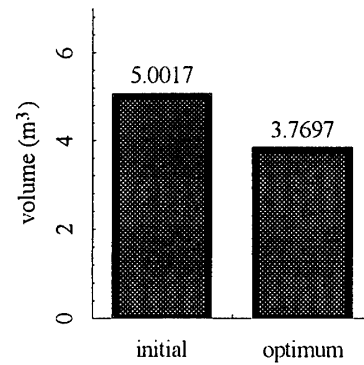


図 6 ボリュームの変化

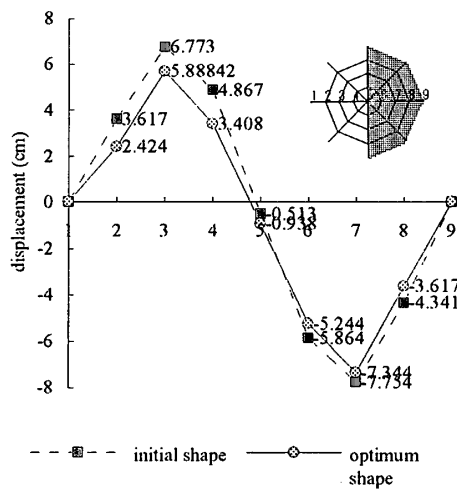


図 4 Half-loading case による上部節点の変位

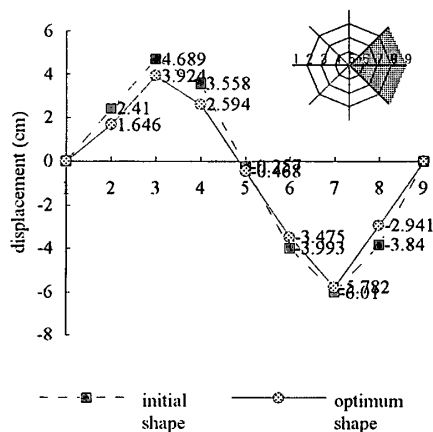
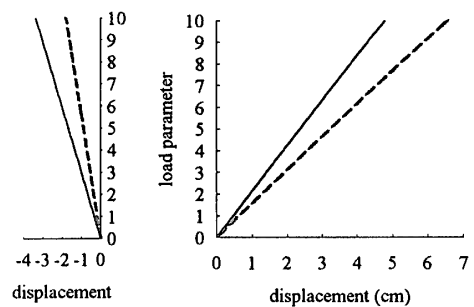
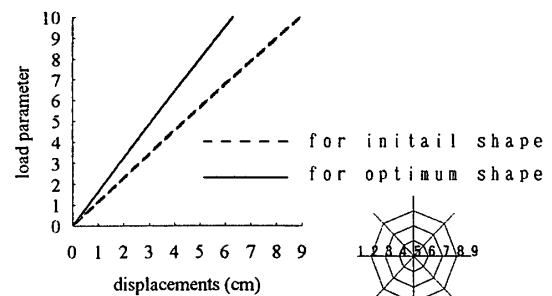


図 5 Quarter-loading case による上部節点の変位



(a) Full-loading case (point 5) (b) Half-loading case (point 3)



(c) quarter-loading case (point 3)

図 7 荷重変位曲線の変化

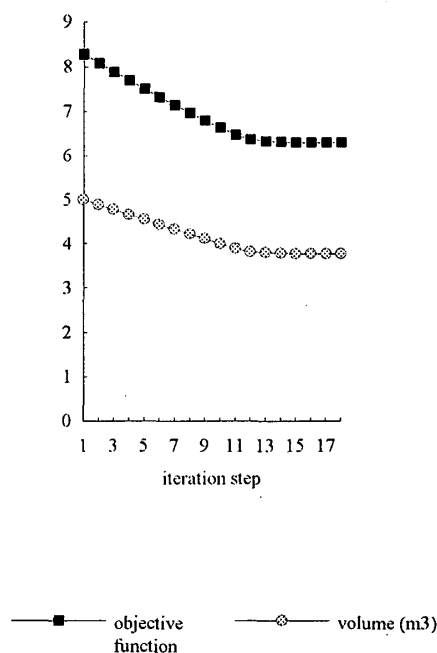


図8 目的関数の収斂

5. おわりに

本解析手法により、例題のtensegrityの節点変位が10～30%減り、ボリュームが24.6%減ることが見られた。

例題では全域、半域、そして1/4域载荷の三種類の荷重ケースを採り入れ最適化解析を行ったが、実際の設計では、最も影響の大きな荷重ケースを採り入れるようになる。また、この方法により得られる最適形態は重み係数に依存するため、具体的な設計要件を勘案し、適切な重み係数を決めることが重要である。

本論文で紹介された多目的形態最適化は、設計方案の近傍に、より良い構造形態を見付け出し、設計方案の改良において重要な手法になると考えられる。

参考文献

- 1) V. Pareto, Cours d-Economie Politique, Rouge, Lausanne, Switzerland, 1896.
- 2) W. Stadler, Preference Optimality and Applications of Pareto Optimality, Multicriterion Decision making (A. Marzollo and G. Leitmann, eds.), CISM Courses and Lectures, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1975.
- 3) Pei Shan Chen, Masaru Abe, Mamoru Kawaguchi, Shape of Tensegrity Frames Having An Optimum Rigidity, 4th Conference on Space structures, University of Surrey, UK., Sep. 5-10, 1993.
- 4) Pei Shan Chen and Mamoru Kawaguchi, Minimum-Deformation-Shape of Prestressed Bar-Structures, Nonlinear Analysis And Design for Shell and Spatial Structures, Proceeding of The Seiken-IASS Symposium Oct. 19-22, 1993, Tokyo, Japan.
- 5) 陳 沛山、川口 衛：テンション構造の最小変位形態、日本建築学会論文報告集、第468号。1995年2月。pp.101～108.
- 6) 陳 沛山、川口 衛：テンション構造の最大剛性形態、日本建築学会構造系論文集、第476号。1995年10月。pp.113-120
- 7) Wolfram Stadler: Multicriteria Optimization in Engineering and in the Sciences, Plenum Press, 1988.
- 8) H. Adeli, Advances in Design Optimization, Chapman & Hall, 1994.
- 9) 半谷 裕彦、川口 健一：形態解析、計算力学とCAEシリーズ 5、培風館、1991。
- 10) 今野 浩、山下 浩：非線形計画法、日科技連、1978。
- 11) M. Minoux: Mathematical Programming (Theory and Algorithms), John Wiley and Sons, 1983.

(1995年8月14日原稿受理, 1995年11月9日採用決定)