

高解像度風上解法を用いた 鉛直2次元自由表面流モデル

TWO-DIMENSIONAL NUMERICAL MODEL FOR FREE-SURFACE FLOWS
USING HIGH-RESOLUTION UPWIND SCHEME

重枝 未玲¹・秋山 壽一郎²・中江 邦昭³
Mirei SHIGE-EDA, Juichiro AKIYAMA and Kuniaki NAKAE

¹正会員 博(工) 九州工業大学准教授 工学部建設社会工学科 (〒804-8550 北九州市戸畑区仙水町1-1)

²フェロー会員 Ph.D. 九州工業大学教授 工学部建設社会工学科 (同上)

³学生会員 九州工業大学大学院 工学研究科建設社会工学専攻 (同上)

A two-dimensional numerical model for free-surface flows was constructed. The model was based on the high-resolution upwind scheme with MUSCL (Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws) technique, SMAC (Simplified Marker and Cell) method and a collocated grid system. The free-surface was treated by VOF (Volume of Fluid) method which was one of interface-capturing methods. The model was verified against experimental data of the dam-break flow propagating over a triangular bottom sill as well as flow at downstream from a groundsill. It showed that the model can reproduce the behavior of the dam-break flow and the flow at downstream from a groundsill.

Key Words : Free-surface flows, numerical model, high-resolution upwind scheme, SMAC method
MUSCL method, VOF method

1. はじめに

河川構造物の設計を行う上で、構造物に作用する流体力や構造物周辺あるいは下流で生じる河床洗掘特性の把握が重要になる¹⁾。そのためには、当然のことながら、構造物周辺の流れを的確に予測することが不可欠である。

構造物周辺の流れは、鉛直方向の流速が卓越し、水面が複雑に変形する場合が多い。そのため、予測を行う数値モデルには、3次元あるいは鉛直2次元モデルであること、構造物形状を取り扱えること、複雑な自由表面形状を取り扱えることが求められる。このようなモデルとして、水制周辺の局所洗掘を対象としたNagata *et al.*²⁾のモデル、床止め工下流の局所洗掘を対象にした内田ら³⁾、梶川ら⁴⁾のモデル、ダム破壊流れを対象にした坪郷・朝位⁵⁾のモデル、魚道内の流れを対象とした前野ら⁶⁾のモデル、水路を遡上する津波を対象とした牛島ら⁷⁾のモデルなどが開発されている。

いずれのモデルも自由表面の取り扱いには、ALE(Arbitrary Lagrangian-Eulerian)法などに代表される界面追跡法^{2), 3), 4)}あるいはVOF(Volume-of-Fluid)法などに代表される界面捕捉法^{5), 6), 7)}のいずれかが用いられている。界面捕捉法は、界面追跡法とは異なり自由表面を明確な

境界として取り扱わず、そのため水面形状に沿って計算格子を再配置する必要がなく固定格子で大きく変形する複雑な水面形状を取り扱うことが可能である⁸⁾。

界面捕捉法は、このようなメリットを持つ一方で、数値拡散による水面(界面)のぼやけにより、計算時間の経過とともに水の体積が保存されない問題を有している。これを回避するために、Donor-Acceptor法や体積補正法⁵⁾、移流項に対して高精度な計算スキームを適用する⁷⁾などの方法がとられている。しかし、数値拡散は、安定した計算を行うためには必要であり、これを0とすることは不可能である。そのため、界面捕捉法では気液界面での数値拡散を如何に抑えるかが予測精度の高いモデルを構築する上で鍵となる。

高解像度風上解法は、数値拡散を抑えることができる解析手法の一つである⁹⁾。このような高解像度スキームに基づき自由表面流れの数値モデルを構築すれば、複雑な水面形状を的確に捉えることができ、より精度の高いモデルを構築することができると考えられる。

本研究は、以上のような背景を踏まえ、構造物周辺の流れと局所洗掘を取り扱うことができる数値モデルの開発を最終的な目的としている。ここでは、その第一歩として、一般座標コロケート格子と高解像度風上解法の一つであるMUSCL法を用い、自由表面流れの鉛直2次元モ

デルの構築を行った。次に、障害物がある場でのダム破壊流れと床止め下流の洗掘孔内の流れに関する実験結果に基づき、モデルの予測精度を検証した。

2. モデルの概要

(1) 基礎方程式

基礎方程式は、連続の式、運動方程式およびVOF関数の移流方程式であり、それぞれ式(1)、(2)および(3)で表される。

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial vv}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - \rho g \quad (2)$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial t} + \frac{\partial u F_m}{\partial x} + \frac{\partial v F_m}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ここに、 t =時間、 x 、 y =流下、鉛直方向、 u 、 v = x 、 y 方向の流速、 p =圧力、 ρ =密度、 g =重力加速度、 μ =粘性係数である。また、 F_m =VOF関数 F をtan関数により変数変換を施した関数であり、 $F_m = \tan[a\pi(F-0.5)] - \tan[a\pi(-0.5)]$ で定義される。これは、数値拡散による気液界面のぼやけを低減するために導入したものである。ここに、 a は係数で、この値が大きいほど、数値拡散は小さくなる。ここでは $a=0.99$ とした。

一般座標を ξ 、 η とし、一般座標での速度の反変成分を $U=\xi_x u + \xi_y v$ 、 $V=\eta_x u + \eta_y v$ とすると、式(1)、(2)、(3)はそれぞれ式(4)、(5)、(6)のように変換される。

$$\frac{1}{J} \left(\frac{\partial JU}{\partial \xi} + \frac{\partial JV}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (4)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial JUu}{\partial \xi} + \frac{\partial JVu}{\partial \eta} \right) \right\} = - \left(\xi_x \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \quad (5)$$

$$\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} [\mu D_{11}] + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} [\mu D_{11}] + \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} [\mu D_{12}] + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} [\mu D_{12}]$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial JUV}{\partial \xi} + \frac{\partial JVV}{\partial \eta} \right) \right\} = -\rho g - \left(\xi_y \frac{\partial p}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) +$$

$$\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} [\mu D_{21}] + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} [\mu D_{21}] + \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} [\mu D_{22}] + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} [\mu D_{22}]$$

$$\frac{\partial F_m}{\partial t} + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial JUF_m}{\partial \xi} + \frac{\partial JVF_m}{\partial \eta} \right) = 0 \quad (6)$$

$$D_{11} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \left(\xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

$$D_{12} = D_{21} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \xi_y \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} + \xi_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta}$$

$$D_{22} = 2 \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \left(\xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)$$

ここに、 $J=(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)$ =変換ヤコビアンである。また、デカルト座標と一般座標との間には次式の関係がある。

$$\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} y_\eta & -x_\eta \\ -y_\xi & x_\xi \end{pmatrix}$$

(2) コロケート格子を用いた数値解法

コロケート格子を図-1に示す。SMAC法¹⁰⁾に基づく計算アルゴリズムは以下に示す(a)~(d)の通りである。

(a) 計算格子中心での移流項、粘性項、圧力項、重力項を計算し、式(7)、式(8)から、 u 、 v の予測子を、式(9)より新しい時間ステップの密度関数 F を求める。時間積分には2次精度のAdams-Bashforthを用いる。

$$u_{i,j}^p = u_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}} \left\{ \xi_{xi,j} \left(-\bar{p}_{i-1/2,j}^\xi + \bar{p}_{i+1/2,j}^\xi \right) + \eta_{xi,j} \left(-\bar{p}_{i,j-1/2}^\eta + \bar{p}_{i,j+1/2}^\eta \right) \right\} + \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}} \frac{3G_{2i,j}^n - G_{2i,j}^{n-1}}{2} \quad (7)$$

$$v_{i,j}^p = v_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}} \left\{ \xi_{yi,j} \left(-\bar{p}_{i-1/2,j}^\xi + \bar{p}_{i+1/2,j}^\xi \right) + \eta_{yi,j} \left(-\bar{p}_{i,j-1/2}^\eta + \bar{p}_{i,j+1/2}^\eta \right) \right\} + \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}} \frac{3G_{2i,j}^n - G_{2i,j}^{n-1}}{2} - g\Delta t \quad (8)$$

$$F_{mi,j}^{n+1} = F_{mi,j}^n - \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}} \frac{3G_{3i,j}^n - G_{3i,j}^{n-1}}{2} \quad (9)$$

$$F_{i,j}^{n+1} = atan \left\{ F_{mi,j}^{n+1} + \tan[a\pi(-0.5)] \right\} / (a\pi) + 0.5$$

式中の G_{kij} ($k=1,2,3$)= A_{kij} 、 B_{kij} であり $f_k=u$ ($k=1$)、 $f_k=v$ ($k=2$)、 $f_k=F_m$ ($k=3$)とすると、次式のように表される。

$$A_{ki,j} = -\frac{1}{J_{i,j}} \left\{ - \left[(JU) \bar{f}_k^\xi \right]_{i-1/2,j} + \left[(JU) \bar{f}_k^\xi \right]_{i+1/2,j} - \left[(JV) \bar{f}_k^\eta \right]_{i,j-1/2} + \left[(JV) \bar{f}_k^\eta \right]_{i,j+1/2} \right\}$$

$$B_{ki,j} = \xi_{xi,j} \left(-\bar{\mu}_{i-1/2,j}^\xi \bar{D}_{k1i-1/2,j}^\xi + \bar{\mu}_{i+1/2,j}^\xi \bar{D}_{k1i+1/2,j}^\xi \right) + \eta_{xi,j} \left(-\bar{\mu}_{i,j-1/2}^\eta \bar{D}_{k2i,j-1/2}^\eta + \bar{\mu}_{i,j+1/2}^\eta \bar{D}_{k2i,j+1/2}^\eta \right) + \xi_{yi,j} \left(-\bar{\mu}_{i-1/2,j}^\xi \bar{D}_{k2i-1/2,j}^\xi + \bar{\mu}_{i+1/2,j}^\xi \bar{D}_{k2i+1/2,j}^\xi \right) + \eta_{yi,j} \left(-\bar{\mu}_{i,j-1/2}^\eta \bar{D}_{k2i,j-1/2}^\eta + \bar{\mu}_{i,j+1/2}^\eta \bar{D}_{k2i,j+1/2}^\eta \right)$$

ただし、 $B_{3ij}=0$ である。

$$D_{11i-1/2,j} = 2 \left\{ \xi_{xi-1/2,j}^\xi \left(-u_{i-1,j} + u_{i,j} \right) + \bar{\eta}_{xi-1/2,j}^\eta \left(-u_{i-1/2,j-1/2} + u_{i-1/2,j+1/2} \right) \right\}$$

$$D_{11i,j-1/2} = 2 \left\{ \xi_{xi,j-1/2}^\xi \left(-u_{i-1/2,j-1/2} + u_{i+1/2,j-1/2} \right) + \bar{\eta}_{xi,j-1/2}^\eta \left(-u_{i,j-1} + u_{i,j+1} \right) \right\}$$

$$D_{12i-1/2,j} = D_{2i-1/2,j} =$$

$$\bar{\xi}_{yi-1/2,j}^{\xi}(-u_{i,j} + u_{i,j}) + \bar{\eta}_{yi-1/2,j}^{\eta}(-u_{i-1/2,j-1/2} + u_{i-1/2,j+1/2}) +$$

$$\bar{\xi}_{xi-1/2,j}^{\xi}(-v_{i,j} + v_{i,j}) + \bar{\eta}_{xi-1/2,j}^{\eta}(-v_{i-1/2,j-1/2} + v_{i-1/2,j+1/2})$$

$$D_{12i,j-1/2} = D_{2i,j-1/2} =$$

$$\bar{\xi}_{yi,j-1/2}^{\xi}(-u_{i-1/2,j-1/2} + u_{i+1/2,j-1/2}) + \bar{\eta}_{yi,j-1/2}^{\eta}(-u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) +$$

$$\bar{\xi}_{xi,j-1/2}^{\xi}(-v_{i-1/2,j-1/2} + v_{i+1/2,j-1/2}) + \bar{\eta}_{xi,j-1/2}^{\eta}(-v_{i,j-1} + v_{i,j+1})$$

$$D_{22i-1/2,j} = 2\left\{\bar{\xi}_{yi-1/2,j}^{\xi}(-v_{i,j} + v_{i,j}) + \bar{\eta}_{yi-1/2,j}^{\eta}(-v_{i-1/2,j-1/2} + v_{i-1/2,j+1/2})\right\}$$

$$D_{22i,j-1/2} = 2\left\{\bar{\xi}_{yi,j-1/2}^{\xi}(-v_{i-1/2,j-1/2} + v_{i+1/2,j-1/2}) + \bar{\eta}_{yi,j-1/2}^{\eta}(-v_{i,j-1} + v_{i,j+1})\right\}$$

ここに Δt =時間の刻み幅, n =時間に体する添字である.
また, $[(JU)\tilde{f}_k^{\xi}]_{i-1/2,j}$, $[(JV)\tilde{f}_k^{\eta}]_{i,j-1/2}$ は数値流束であり,
次式で表される.

$$[(JU)\tilde{f}_k^{\xi}]_{i-1/2,j} = (JU)_{i-1/2,j} \frac{f_{Li-1/2,j} + f_{Ri-1/2,j}}{2} -$$

$$|(JU)_{i-1/2,j}| \frac{-f_{Li-1/2,j} + f_{Ri-1/2,j}}{2}$$

$$[(JV)\tilde{f}_k^{\eta}]_{i,j-1/2} = (JV)_{i,j-1/2} \frac{f_{Li,j-1/2} + f_{Ri,j-1/2}}{2} -$$

$$|(JV)_{i,j-1/2}| \frac{-f_{Li,j-1/2} + f_{Ri,j-1/2}}{2}$$

ここで, $f_{Li-1/2,j}$ 等は, MUSCL法¹¹⁾により内挿された f を表す.

(b) 式(10)のように流速の予測値 u^p と v^p を反変成分に変換しヤコビアン J を乗じ, スタガード位置に補間する.

$$JU^p = J(\xi_x u^p + \xi_y v^p), \quad JV^p = J(\eta_x u^p + \eta_y v^p) \quad (10)$$

(c) 式(11)に示す圧力の時間変化に対応したスカラーポテンシャル ϕ のポアソン方程式をSOR法により解く.

$$\frac{\bar{\xi}_{xi-1/2,j}^{\xi} + \bar{\xi}_{xi,j-1/2}^{\eta}}{4} \phi_{i-1,j+1} +$$

$$\left(\bar{\xi}_{xi,j-1/2}^{\eta} + \frac{\bar{\xi}_{xi-1/2,j}^{\xi} + \bar{\xi}_{xi,j-1/2}^{\eta}}{4} \right) \phi_{i,j-1} -$$

$$\frac{\bar{\xi}_{xi+1/2,j}^{\xi} + \bar{\xi}_{xi,j-1/2}^{\eta}}{4} \phi_{i+1,j-1} +$$

$$\left(\bar{\xi}_{xi+1/2,j}^{\xi} + \frac{\bar{\xi}_{xi-1/2,j}^{\xi} + \bar{\xi}_{xi,j-1/2}^{\eta} - \bar{\xi}_{xi+1/2,j}^{\xi}}{4} \right) \phi_{i-1,j} -$$

$$\left(\bar{\xi}_{xi-1/2,j}^{\xi} + \bar{\xi}_{xi+1/2,j}^{\xi} + \bar{\xi}_{xi,j-1/2}^{\eta} + \bar{\xi}_{xi,j+1/2}^{\eta} \right) \phi_{i,j} +$$

$$\left(\bar{\xi}_{xi+1/2,j}^{\xi} - \frac{\bar{\xi}_{xi-1/2,j}^{\xi} + \bar{\xi}_{xi,j-1/2}^{\eta} - \bar{\xi}_{xi+1/2,j}^{\xi}}{4} \right) \phi_{i+1,j} -$$

$$\frac{\bar{\xi}_{xi-1/2,j}^{\xi} + \bar{\xi}_{xi,j+1/2}^{\eta}}{4} \phi_{i-1,j+1} +$$

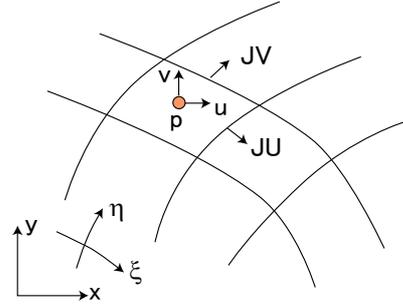


図-1 コロケート格子

$$\left(\frac{\bar{\xi}_{xi+1/2,j}^{\xi} - \bar{\xi}_{xi-1/2,j}^{\xi} - \bar{\xi}_{xi+1/2,j}^{\eta}}{4} \right) \phi_{i,j+1} +$$

$$\frac{\bar{\xi}_{xi+1/2,j}^{\xi} + \bar{\xi}_{xi,j-1/2}^{\eta}}{4} \phi_{i+1,j+1} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} (-JU_{i-1/2,j}^p + JU_{i+1/2,j}^p - JV_{i,j-1/2}^p + JV_{i,j+1/2}^p)$$

ここに, $\xi^{kl} = \gamma^{kl}/\rho$, $\gamma^{kl} = J(\partial \xi^k / \partial x_m)$ ($\partial \xi^l / \partial x_m$)である.

(d) ϕ の勾配により, 式(12)と式(13)から JU , JV と u , v を修正し, また, 式(14)に示すように, ϕ により p を更新することで, 新しい時間ステップの速度および圧力を求める.

$$JU_{i-1/2,j}^{n+1} = JU_{i-1/2,j}^p - \frac{\Delta t}{\rho_{i-1/2,j}} \left\{ \bar{\gamma}_{i-1/2,j}^{\xi\xi} (-\phi_{i-1,j} + \phi_{i,j}) + \bar{\gamma}_{i-1/2,j}^{\xi\eta} (-\phi_{i-1/2,j-1/2} + \phi_{i-1/2,j+1/2}) \right\}$$

$$JV_{i,j-1/2}^{n+1} = JV_{i,j-1/2}^p - \frac{\Delta t}{\rho_{i,j-1/2}} \left\{ \bar{\gamma}_{i,j-1/2}^{\eta\eta} (-\phi_{i-1/2,j-1/2} + \phi_{i+1/2,j-1/2}) + \bar{\gamma}_{i,j-1/2}^{\eta\xi} (-\phi_{i,j-1} + \phi_{i,j}) \right\}$$

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}} \left\{ \xi_{xi,j} (-\bar{\phi}_{i-1/2,j}^{\xi} + \bar{\phi}_{i+1/2,j}^{\xi}) + \eta_{xi,j} (-\bar{\phi}_{i,j-1/2}^{\eta} + \bar{\phi}_{i,j+1/2}^{\eta}) \right\}$$

$$v_{i,j}^{n+1} = v_{i,j}^p - \frac{\Delta t}{\rho_{i,j}} \left\{ \xi_{yi,j} (-\bar{\phi}_{i-1/2,j}^{\xi} + \bar{\phi}_{i+1/2,j}^{\xi}) + \eta_{yi,j} (-\bar{\phi}_{i,j-1/2}^{\eta} + \bar{\phi}_{i,j+1/2}^{\eta}) \right\}$$

$$p^{n+1} = p^n + \phi \quad (14)$$

圧力項, 粘性項および連続の式については中心差分により離散化を行う. なお, 移流項については, 式(15)のように基本変数をMUSCL法により内挿する.

$$f_{Li-1/2,j} = f_{Li-1/2,j} + \frac{1}{4} [(1-\kappa)\bar{\Delta}_{\xi,j-1}^- + (1+\kappa)\bar{\Delta}_{\xi,j-1}^+] \quad (15)$$

$$f_{Ri-1/2,j} = f_{Ri-1/2,j} - \frac{1}{4} [(1-\kappa)\bar{\Delta}_{\xi,j}^+ + (1+\kappa)\bar{\Delta}_{\xi,j}^-]$$

$$f_{Li,j-1/2} = f_{Li,j-1/2} + \frac{1}{4} [(1-\kappa)\bar{\Delta}_{\eta,j-1}^- + (1+\kappa)\bar{\Delta}_{\eta,j-1}^+]$$

$$f_{Ri,j-1/2} = f_{Ri,j-1/2} - \frac{1}{4} [(1-\kappa)\bar{\Delta}_{\eta,j}^+ + (1+\kappa)\bar{\Delta}_{\eta,j}^-]$$

$$\bar{\Delta}_{\xi,j-1}^- = \text{van_Albada}(\Delta_{\xi,j-1}^-, \Delta_{\xi,j-1}^+)$$

$$\bar{\Delta}_{\xi,j-1}^+ = \text{van_Albada}(\Delta_{\xi,j-1}^+, \Delta_{\xi,j-1}^-)$$

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_{\eta,j-1}^- &= \text{van_Albada}(\Delta_{\eta,j-1}^-, \Delta_{\eta,j-1}^+) \\ \bar{\Delta}_{\eta,j-1}^+ &= \text{van_Albada}(\Delta_{\eta,j-1}^+, \Delta_{\eta,j-1}^-)\end{aligned}$$

ここに、 $\Delta_{\xi,j-1}^- = -f_{i-2,j} + f_{i-1,j}$ 、 $\Delta_{\xi,j-1}^+ = -f_{i-1,j} + f_{i,j}$ 、

$\Delta_{\eta,j-1}^- = -f_{i,j-2} + f_{i,j-1}$ 、 $\Delta_{\eta,j-1}^+ = -f_{i,j-1} + f_{i,j}$ 、である。

またvan_Albadaは式(16)で定義される関数である¹²⁾。

$$\text{van_Albada}(a,b) = \frac{(|a|^2 + \varepsilon^2)b + (|b|^2 + \varepsilon^2)a}{|a|^2 + |b|^2 + 2\varepsilon^2} \quad (16)$$

ここに、 ε は小さな正の値で $\varepsilon=1.0 \times 10^{-6}$ としている。

(3) 境界条件

閉境界条件については u 、 v を与えた。側壁と底面のような閉境界条件については $u=v=0$ とした。圧力については次式を連立することで求めた。

・i-1が境界の場合

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} + \frac{\gamma_{i-1/2,j}^{\xi\eta}}{4\gamma_{i-1/2,j}^{\xi\xi}} \left(-\phi_{i-1,j-1} - \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j+1} \right)$$

・i+1が境界の場合

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} - \frac{\gamma_{i+1/2,j}^{\xi\eta}}{4\gamma_{i+1/2,j}^{\xi\xi}} \left(-\phi_{i,j-1} - \phi_{i+1,j-1} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1} \right)$$

・j-1が境界の場合

$$\phi_{i,j-1} = \phi_{i,j} + \frac{\gamma_{i,j-1/2}^{\eta\xi}}{4\gamma_{i,j-1/2}^{\eta\eta}} \left(-\phi_{i-1,j-1} - \phi_{i,j-1} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j-1} \right)$$

・j+1が境界の場合

$$\phi_{i,j+1} = \phi_{i,j} - \frac{\gamma_{i,j+1/2}^{\eta\xi}}{4\gamma_{i,j+1/2}^{\eta\eta}} \left(-\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j+1} + \phi_{i+1,j+1} + \phi_{i+1,j} \right)$$

なお、 $\phi_{0,0}=\phi_{0,1}$ 、 $\phi_{0,i+1}=\phi_{0,i}$ 、 $\phi_{k+1,0}=\phi_{k+1,1}$ 、 $\phi_{k+1,i+1}=\phi_{k+1,i}$ とした。

3. モデルの検証

ダム破壊流れ¹³⁾および床止め下流の洗掘孔内の流れに関する実験結果に基づきモデルの検証を行う。

(1) ダム破壊流れの実験結果に基づく検証

ダム破壊流れは、ダムを取り除き貯水槽に貯留された水を空気中に流出させることで生じる流れであり、自由表面流れの数値解析法の検証に良く用いられる。これは、ダム破壊流れは、二つの流体が不連続に接するため急激に変形し、用いる解析手法によっては数値振動が発生し解析の継続が困難な流れであるため、数値モデルの安定性、予測精度、数値拡散による水面のぼやけなどを検討できるからである。本研究では、Chacon *et al.*¹³⁾がモデルの検証に用いたLaboratoire de Recherches Hydrauliques of the Université Libre de Bruxellesの障害物がある場でのダム

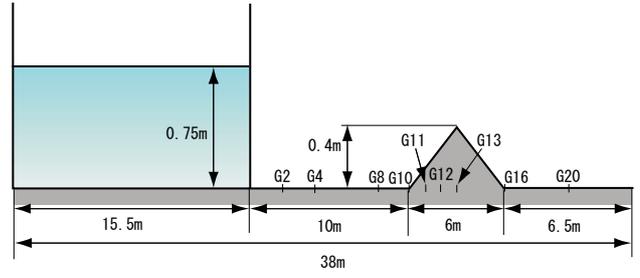


図-2 ダム破壊流れの実験装置と測定点の概要

破壊流れの実験結果に基づき、本モデルの予測精度、VOF関数の拡散状況について検証した。

a) 実験の概要

実験装置は、図-2に示すように、貯水槽部、ダム、氾濫原部で構成されている。氾濫原部には地形起伏をモデル化した三角形の障害物(長さ6m、高さ0.4m)が設けられている。貯水槽部に水深0.75mの水を貯留させ、瞬間的にダムを取り除くことでダム破壊流れを発生させている。下流端は自由流出となっており、G2～G20で水深が測定されている。

b) 解析条件

解析対象領域は、鉛直方向に81個、水平方向に180個に分割した。初期条件については、貯水槽部には水深0.75mの位置まで密度 $\rho=1000.0\text{kg/m}^3$ とVOF関数 $F=1.0$ を与え、その他の領域には空気密度 $\rho=1.0\text{kg/m}^3$ とVOF関数 $F=0.0$ を与えた。粘性係数 μ には空気と水の粘性係数を与えた。境界条件については、下流端に自由流出条件を、上流端と底面には閉境界条件を与えた。時間の刻み幅は0.002秒とした。なお、全計算を通じてVOF関数の誤差は5%程度であった。また、この条件下で、移流項にQUICK¹²⁾のような従来のスキームを用いたモデルで計算を行ったところ、数値振動が発生し計算を継続することは不可能であった。

c) 結果と考察

図-3は、本モデルより得られたVOF関数の経時変化を示したものである。これより、ダム破壊流れが、三角形の障害物に到達し、障害物を乗り越える様子や、障害物により発生した段波が時間の経過とともに貯水槽部へと進行する様子などが確認できる。また、VOF関数の拡散状況に着目すると、障害物や壁面付近で拡散が若干大きいもののいずれもVOF関数が1あるいは1に近い値であり、高い解像度で水面を捉えていることがわかる。

図-4は、測定点G4、10、13、20の解析結果と実験値との比較を行ったものである。なお、解析については、VOF関数 $F=0.5$ から求めた水深に加え、静水圧分布を仮定することで底面圧力から求めた水深も示している。これらから、解析結果は、測定点G4の $t=15\text{s}$ 付近を除いては実験結果を概ね再現していることがわかる。なお、測定点G13とG20の25秒以降で水深が0であるのに、圧力が振動しているのは、 $F<0.5$ のVOF関数が滞留しているためそこの密度が他の箇所より大きくなったためであ

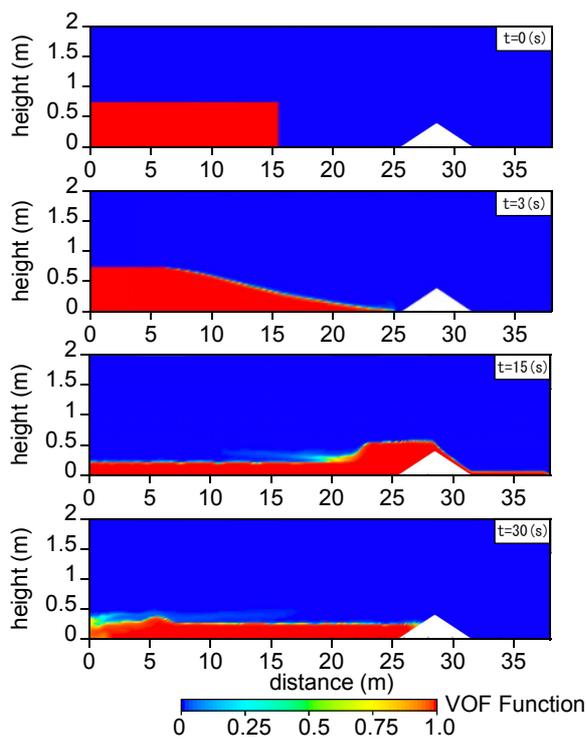


図-3 水面形状 (VOF関数) の経時変化 (解析結果)

る。また、測定点G4でずれが生じるのは、上流へ伝播する段波の波高と波速を過小に評価したためと考えられる。これは、図-3 $t=15s$ に示されるように、界面補足法に起因した気相と液相との拡散や数値拡散により、せん断応力が生じるとともに障害物によって生じる段波の波高が過小に評価されるためだと考えられる。VOF関数と圧力より求めた水深を比較すると、測定点G10およびG13の10秒以前で両者にずれが生じることが確認できる。これらはいずれも流れが物体周辺に到達した直後であり、これらの時間では静水圧近似が崩れることが確認できる。

以上から、本モデルは、ダム破壊流れのような計算の実行が困難な流れに対して数値拡散により水面のぼやけを極力抑えることができ、ある程度の精度で予測可能であることが確認された。

(2) 床止め下流の流れの実験結果に基づく検証

a) 実験の概要

実験装置は、図-5に示すような全長 $L=20.5m$ 、幅 $B=0.6m$ 、勾配 $f=1/500$ の開水路である。床止めを2mにわたり設置し、床止め下流を3mにわたり粒径 $d=0.75mm$ の一樣砂で敷き詰めた。床止め上流は固定床とし、床止め下流では河床洗掘を想定して初期河床までの落差を0.05mとした。

水路上流端から流量 $Q=0.010m^3/s$ の水を供給し河床が平衡状態に至るまで通水した。その後、水面形状と流速ベクトルを求めた。水面形状と河床高については、デジタルビデオカメラで撮影した画像を画像解析することにより求めた。流速ベクトルについては、河床をニスで固定し、3次元電磁流速計により測定した。測定間隔は、

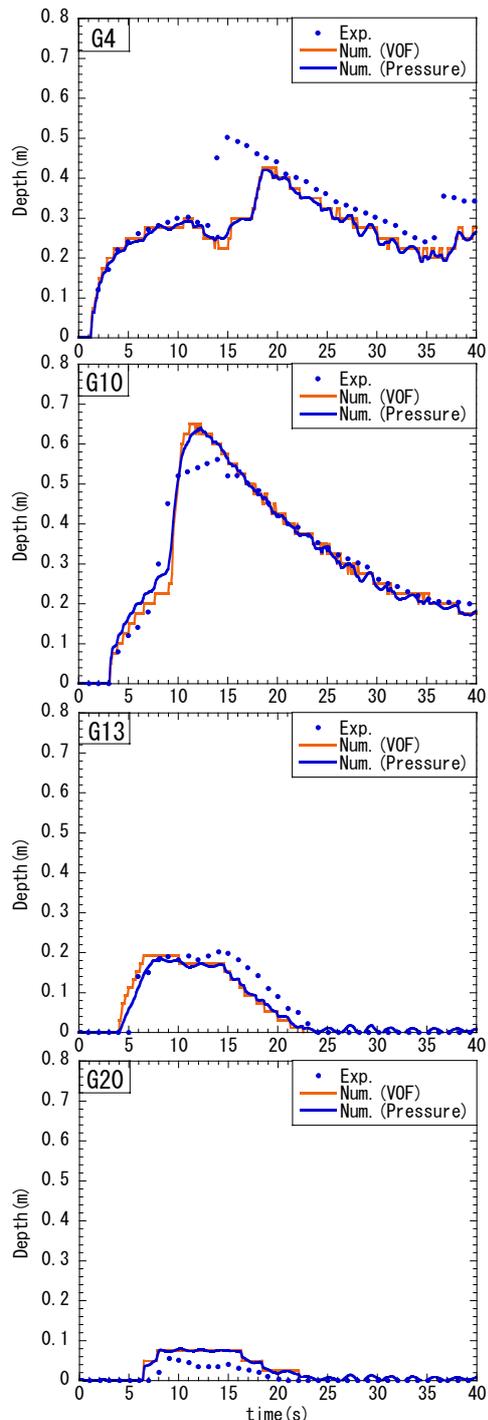


図-4 水深の経時変化の比較

洗掘孔内の流況が把握できるように $x=0.025m$ 、 $z=0.02m$ とした。サンプリング間隔とサンプリング時間は、それぞれ0.05秒と30秒である。

b) 解析条件

解析対象領域は、床止め下流端より0.5m上流側から3.0m下流とした。鉛直、水平方向をそれぞれ30、230個に分割した。境界条件には、上流端に流入水深、流速およびVOF関数 $F=1.0$ を与えた。初期条件については、流入水深と同じ水位まで密度 $\rho=1000.0kg/m^3$ とVOF関数 $F=1.0$ を与え、その他の領域には空気密度 $\rho=1.0kg/m^3$ とVOF関数 $F=0.0$ を与えた。粘性係数 μ には空気と水の粘性

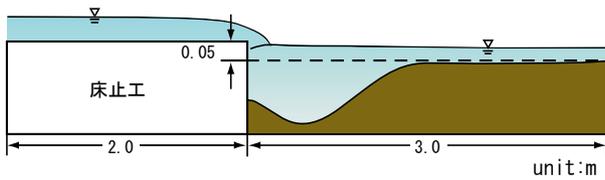
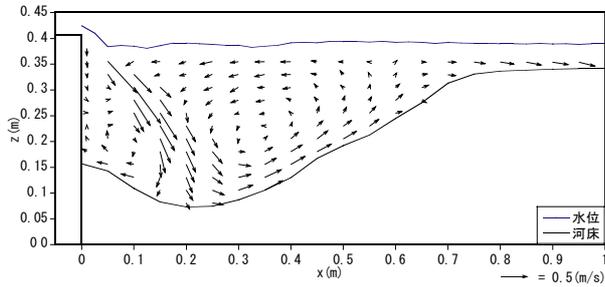
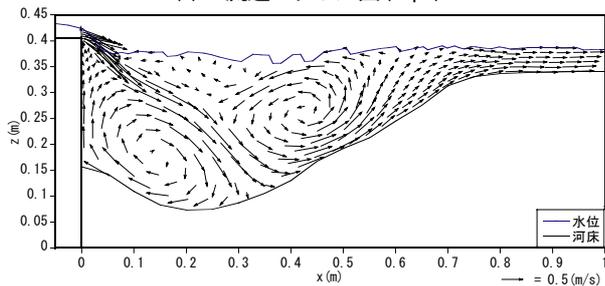


図-5 床止め下流の流れに関する実験装置の概要



(a) 流速ベクトル図(Exp.)



(b) 流速ベクトル図(Num.)

図-6 床止め下流洗掘孔内の流れの比較

係数を与えた。流速はいずれも0とした。時間の刻み幅は0.005秒とした。なお、全計算を通じてVOF関数の誤差は7%程度であった。

c) 結果と考察

図-6は、平衡状態における潜り噴流の水位と流速ベクトルの比較を行ったものである。これより、解析結果は、水位および流速ベクトルを概ね再現していることが確認できる。しかしながら、床止めの洗掘孔内の流れの再付着点など再現できていない。これは、実験結果では床止め下流で大きな渦が生じ、流れのエネルギーが消失されているのに対し、本モデルは乱流モデルを導入していないためにこの現象を再現できないためと考えられる。この点については、LESなどの乱流モデルを今後導入する予定である。

4. おわりに

以上、本研究では、一般座標コロケート格子と高解像度風上解法の一つであるMUSCL法を用い、自由表面流れの鉛直2次元モデルの構築を行った。このモデルを、障害物がある場でのダム破壊流れと床止め下流の洗掘孔内の流れに関する実験結果に基づき検証した。その結果、(1) 本モデルが、計算の実行が困難なダム破壊流れを再現でき、また水面のぼやけを抑えることができること、(2) 床止め下流のような複雑な流れを概ね再現できるこ

とが明らかとなった。

今後は、ALEなどの界面追跡法を用いたモデルとの比較を行うことで、より精度の高い自由表面の取り扱いについて検討するとともに、LESなどの乱流モデルの導入することで、より精度の高いモデルを構築したいと考えている。

謝辞：本研究を遂行するに当たり、本学学部4年生の小柳敦史君には、データ整理等で多大な協力を得た。ここに記して感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 福岡捷二：洪水の水理と河道計画の設計法，森北出版，2005.
- 2) Nagata, N., Hosoda, T. and Muramoto, Y. : Three-dimensional numerical model for flow and bed deformation around river hydraulic structures, *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, Vol.131, No.12, pp.1074-1087, 2005.
- 3) 内田龍彦，福岡捷二，渡邊明英：床止工下流部の局所洗掘の数値解析モデルの開発，土木学会論文集，No.768/II-68, pp.45-54, 2004.
- 4) 梶川勇樹，道上正規，檜谷治，中村真郷：常射混在場における段落ち下流部の局所洗掘に関する数値計算，水工学論文集，第49巻，pp.775-780, 2005.
- 5) 坪郷浩一，朝位孝二：密度関数法による自由水表面流れ解析のための体積補正法の開発，水工学論文集，第49巻，pp.697-702, 2005.
- 6) 前野詩朗，尾上博則，宮内洋介：VOF法による階段式魚道の流れの数値解析，水工学論文集，第45巻，pp.421-426, 2001.
- 7) 牛島省，牧野統師，円界正憲，禰津家久：水路を遡上する波動流れとその氾濫流に対する3次元数値計算，水工学論文集，第50巻，pp.679-684, 2006.
- 8) J.H. ファーツィガー，M. ペリッチ：コンピューターによる流体力学，シュプリンガー・フェアクラ，2003.
- 9) 藤井孝臈：流体力学の数値計算法，東京大学出版会，1994.
- 10) Amsden, A. A. and Harlow, F. H.: A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations, *Journal of Computational Physics*, Vol.23, pp.276-299, 1970.
- 11) Leer, van B. : toward the ultimate conservative difference scheme . 4, A new approach to numerical convection, *Journal of Computational Physics*, Vol.32, pp.101-136, 1982.
- 12) 小林敏雄編：数値流体力学ハンドブック，丸善株式会社，2003.
- 13) Chacon, T., Fernandez, D. and Gomez, M.: A flux-splitting solver for shallow water equations with source terms, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol.42, pp.23-55, 2003.

(2007. 9. 30受付)